第 2 章

ブール代数と論理式

この章では，論理回路の設計を行なう際に必要となるブール代数について学ぶ．命題論理からはじめ，ブール代数の公理や定理を示し，種々の論理関数の性質を概観していこう．

2.1　命題論理

命題 (proposition) とは，その内容の真偽をはっきり決められる文である．一つの命題を**論理変数** A などで表現し，命題 A が**真** (true) であるとき A の**真理値** (truth value) を T で表し，A が**偽** (false) であるとき A の真理値を F で表す．

例えば，”5 は偶数である”という命題 A が与えられたとき，”5 は偶数ではない”という命題 $\overline{A}$ を作ることができる．A と $\overline{A}$ は**素**であり，$\overline{A}$ を A の**否定** (negation) という．

二つの命題 A, B があり，それぞれ A : ”偶数である”, B : ”5 で割り切れる”とすると，A と B により次のような新しい命題を作ることができる．

$A \wedge B$: ”偶数で かつ 5 で割り切れる”
$\overline{A} \wedge B$: ”偶数でなく かつ 5 で割り切れる”
$A \vee B$: ”偶数であるか または 5 で割り切れる”
$A \vee \overline{B}$: ”偶数であるか または 5 で割り切れない”

上の合成命題において，$A \wedge B$ を A **かつ** B と読み，これを**論理積** (logical product) という．また，$A \vee B$ を A **または** B と読み，これを**論理和** (logical sum) という．

以下に否定，論理積，論理和の関係表を示す．このような表を**真理値表** (truth table) という．真理値表は一つの**論理関数**を表現している．ここで，真を数字の"1"で，偽を"0"で表し，2 項演算である論理積，論理和をそれぞれ'·' および'+' で表現する．混同する恐れのないときは演算記号'·' を省略できる．

A や B などの変数 (論理変数) がどのような値をとっても，これに対する論理関数の値が常に真であるとき，この論理関数は**恒真** (tautology) であるといい，例えば $A+\overline{A} \equiv T$ のように表す．逆に，常に偽であれば**恒偽**であるといい，$A \cdot \overline{A} \equiv F$ のように表す．後で述べるように，命題論理はブール代数をなすので，ここでは両者を混同して使用していることに注意を要する．

表 2.1　論理演算の真理値表

(a) 否定

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

(b) 論理和

A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(c) 論理積

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2.2　ブール代数の公理

集合 S に二つの演算"·"と"+"が定義され，以下の公理が成立するとき，S はブール代数を成すという．

公理 1a　A と B が S の任意の 2 元であるとき，$A+B$ も S の元である．

公理 1b　A と B が S の任意の 2 元であるとき，$A \cdot B$ も S の元である．

公理 2a　A が S の任意の元であるとき，$A+0=A$ となるような元 0 が S に存在する．(単位元の存在)

公理 2b　A が S の任意の元であるとき，$A \cdot 1=A$ となるような元 1 が S に存在する．(単位元の存在)

公理 3a　$A+B=B+A$ が成立する．

公理 3b　$A \cdot B=B \cdot A$ が成立する．

公理 4a　$A+B \cdot C=(A+B) \cdot (A+C)$ が成立する．

公理 4b　$A \cdot (B+C)=A \cdot B+A \cdot C$ が成立する．

公理 5　S の任意の元 A に対して，$A+\overline{A}=1$, $A \cdot \overline{A}=0$ であるような S の元 $\overline{A}$ が存在し，これを否定という．

公理 6　S には $A \neq B$ であるような，少なくとも二つの元 A，B が存在する．

上記の公理は'0', '1' の交換と'$\cdot$', '+' の交換による双対性 (duality) をもつ．

ブール代数，集合演算，そして命題論理は公理 1a から公理 6 までをすべて満足するので，これらは**ブール代数系**をなすという．

2.3　n 変数ブール関数とブール式

前節の公理より，0 と 1 の二つの元をもつ集合はブール代数をなす最小の集合である．この集合に属する元 A は 0 あるいは 1 の値をとる変数であり，これをブール変数 (Boolean variable) という．

互いに独立な n 個のブール変数を論理和や論理積などで結合した式を**ブール式** (Boolean formula) 略して**式**，あるいは**表現** (expression) と呼ぶ．

n 個のブール変数に 0 あるいは 1 の値を定めると，これらの変数を用いて表される式の値が 0 あるいは 1 に定まる．従って，ブール式は n 次元 2 値ベクトル全体から，0 あるいは 1 への関数であり，$B \in \{0,1\}$ のとき $B^n \to B$ である． これをブール関数 (Boolean function) という．

n 次元 2 値ベクトルの総数は 2^n なので n 変数ブール関数の全体は有限で，その数は,

$$N = 2^{2^n} \tag{2.1}$$

である．($n=2$ の場合の全ての関数を後の表 2.2 に示している．)

ブール代数系における 0 を $f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \mathbf{0}$ という関数に対応させ，元 1 を $f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \mathbf{1}$ という関数に対応させたとき，この n 変数ブール関数の集合全体もまたブール代数をなす.

ブール関数は，前出の真理値表で一意に定義できるが，これを表現するブール式は無数に存在し得る．ブール式の中で最も簡単なものを求める問題や，ある種のブール式では独特の性質をもつ場合があるなど，工学的な応用が存在する．

2.4　ブール代数系の定理

ブール代数の公理から導かれる性質をブール代数の定理という．重要なブール代数の定理を以下に示す.

定理 1a　公理 2a を満たす元 0 は唯一である.
定理 1b　公理 2b を満たす元 1 は唯一である.
定理 2　公理 5 を満たす元 $\overline{A}$ は唯一である.

定理 3　$\overline{\overline{A}} = A$ ：**復帰則** (involution law)
定理 4a　$A + A = A$ ：**べき等則** (idempotentlaw)
定理 4b　$A \cdot A = A$ ：**べき等則**
定理 5a　$A + 1 = 1$
定理 5b　$A \cdot 0 = 0$
定理 6a　$A + AB = A$ **吸収則** (absorption law)
定理 6b　$A(A + B) = A$ ：**吸収則**
定理 6c　$A + \overline{A}B = A + B$ ：**吸収則**
定理 7a　$(A + B) + C = A + (B + C)$ **結合則** (association law)
定理 7b　$(AB)C = A(BC)$ ：**結合則**
定理 8a　$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ ：**ド・モルガンの定理** (De Morgan's law)
定理 8b　$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ ：**ド・モルガンの定理**

【定理 3 の証明】$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}} \cdot (A + \overline{A}) = \overline{\overline{A}}A + \overline{\overline{A}}\ \overline{A} = \overline{\overline{A}}A + 0 = \overline{\overline{A}}A + A\overline{A} = A(\overline{A} + \overline{\overline{A}}) = A$ ($\because A\overline{A} = 0,\ A + \overline{A} = 1$)

【定理 6c の証明】$A + \overline{A}B = A + AB + \overline{A}B = A + (A + \overline{A})B = A + B$ ($\because A = A + AB$(定理 6a) あるいは $A = A(1 + B) = A + AB$)

2.5　2 変数ブール関数と完全系

はじめに最も簡単な 1 変数関数を考える．変数 A の取り得る値 $\{0, 1\}$ に対し，論理関数の全ては表 2.2 のようになる．全ての 1 変数論理関数は，$2^{2^1} = 4$ 個あり，$f_0 = 0$, $f_3 = 1$ で関数としてあまり意味がない．同様に $f_1 = A$ でこれもあまり重要でない．$f_2 = \overline{A}$ は否定関数であり，1 変数関数ではこれのみが重要である．

表 2.2　すべての 1 変数論理関数

A	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

2 変数論理関数は $2^{2^2} = 16$ 個あり，それらのすべてを表 2.3 に示す．これらの 2 変数論理関数のブール表現を表 2.4 に示し，それらの意味を説明する．

一般に，論理演算記号の結合の強さは，$\overline{}$，$\cdot$，$+$，$\oplus$，$\rightarrow$，$\equiv$，$=$ の順であ

表 2.3　すべての 2 変数論理関数

A	B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

表 2.4　2 変数論理関数のブール表現

ブール表現	記 号	説 明
$f_0 = 0$		
$f_1 = AB$	AB	論理積 (AND)
$f_2 = A\overline{B}$	$A - B$	論理差
$f_3 = A$	A	
$f_4 = \overline{A}B$	$B - A$	論理差
$f_5 = B$	B	
$f_6 = A\overline{B} + \overline{A}B$	$A \oplus B$	排他的論理和
$f_7 = A + B$	$A + B$	論理和 (OR)
$f_8 = \overline{A + B}$	$A \downarrow B$	peirce(NOR)
$f_9 = \overline{A}\ \overline{B} + AB$	$A \equiv B$	対等
$f_{10} = \overline{B}$	$\overline{B}$	否定 (NOT)
$f_{11} = A + \overline{B}$	$B \to A$	含意
$f_{12} = \overline{A}$	$\overline{A}$	否定 (NOT)
$f_{13} = \overline{A} + B$	$A \to B$	含意
$f_{14} = \overline{AB}$	$A \uparrow B$	Sheffer の縦棒 (NAND)
$f_{15} = 1$		

る．以下に 2 変数論理関数を説明する．

f_1：　通常の論理積演算 (AND 演算) である．

f_2, f_4：　論理差と呼ばれる．$f_2 = A - B$ は A のみが 1 のとき，$f_4 = B - A$ は B のみが 1 のとき関数値が 1 となる (表 2.5).

表 2.5　論理差の真理値表

A	B	A - B	B - A
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

f_6： 排他的論理和 (exclusive OR) といい，2 を法とする和 (modulo 2 sum) である．演算記号'$\oplus$' を用い，以下の基本性質を有する (表 2.6)．但し，

$$X \oplus Y = X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y. \tag{2.2}$$

表 2.6　排他的論理和の真理値表

A	B	A $\oplus$ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\begin{aligned} A \oplus 1 &= A \cdot \overline{1} + \overline{A} \cdot 1 = A \cdot 0 + \overline{A} = \overline{A} \\ A \oplus 0 &= A \\ A \oplus A &= 0 \qquad \text{(減算ともいえる)} \\ A(B \oplus C) &= AB \oplus AC \\ A \oplus B \oplus AB &= A(1 \oplus B) \oplus B = A\overline{B} \oplus B \\ &= A\overline{B} \cdot \overline{B} + (\overline{A\overline{B}})B \quad \text{式 (2.2) より,} \\ &= A\overline{B} + (\overline{A} + B)B = A\overline{B} + B = A + B \qquad \text{(定理 } 6c\text{)} \end{aligned}$$

f_7： 包含的論理和 (inclusive OR) は通常の論理和演算である．

f_8： ピアース (Peirce) の演算．A と B の論理和を否定したもので，NOR と呼ばれる．以下の変換が可能である．（否定も NOR で構成）

$$\overline{A} = \overline{A + A}$$

$$
\begin{aligned}
AB &= \overline{\overline{AB}} = \overline{\overline{A}+\overline{B}} = \overline{\overline{A+A}+\overline{B+B}} \\
A+B &= \overline{\overline{A+B}} = \overline{\overline{A+B}+\overline{A+B}}
\end{aligned}
$$

表 2.7　NOR の真理値表

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

f_9：対等 (equivalence) といい，$A \to B$ かつ $B \to A$ を示す．実際の回路を一致回路 (coincident circuit) という．

表 2.8　対等の真理値表

A	B	A $\equiv$ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

f_{11}，f_{13}：　含意 (inplication) といい，$f_{11} = A \to B$, $f_{13} = B \to A$ で表す．真理値表に注意を要す．通常の代数では $A \leq B$ や $B \leq A$ となる．

表 2.9　含意の真理値表

A	B	A $\to$ B	B $\to$ A
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

f_{14}：　シェファーの縦棒 (Sheffer's stroke) といい，A と B の論理積を否定したものである．通常 NAND といわれ，以下の変換が可能である．

$$\overline{A} = \overline{A \cdot A}$$
$$AB = \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{\overline{A \cdot B} \cdot \overline{A \cdot B}}$$
$$A + B = \overline{\overline{A + B}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{\overline{A \cdot A} \cdot \overline{B \cdot B}}$$

表 2.10　NAND の真理値表

A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

任意のブール関数を表すために必要な最小限の定数と演算の組を**完全系** (functional complete set) という．以下に完全系を示す．その中でも単一の演算のみを含む完全系は興味深い．

表 2.11　ブール関数の完全系

No.	完全系	否 定	論理積	論理和
1	否定，論理積	$\overline{A}$	$A \cdot B$	$\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$
2	否定，論理和	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A} + \overline{B}}$	$A + B$
3	NAND	$\overline{A \cdot A}$	$\overline{\overline{A \cdot B} \cdot \overline{A \cdot B}}$	$\overline{\overline{A \cdot A} \cdot \overline{B \cdot B}}$
4	NOR	$\overline{A + A}$	$\overline{\overline{A + A} + \overline{B + B}}$	$\overline{\overline{A + B} + \overline{A + B}}$
5	対等，論理和，0	$0 \equiv A$	$(A \equiv B) \equiv (A + B)$	$A + B$
6	否定，含意	$\overline{A}$	$\overline{A \to \overline{B}}$	$\overline{A} \to B$
7	抑止，1	$1 - A$	$A - (A - B)$	$1 - ((1 - A) - B)$
8	含意，0	$A \to 0$	$(A \to (B \to 0)) \to 0$	$(B \to A) \to A$

2.6　ブール関数の展開

ブール関数は真理値表で一意に表現されるが，このブール関数を表すブール式はいくつも存在しうる．例えば 3 変数ブール関数 $f(A,B,C) = A + BC$ は $f(A,B,C) = A\overline{B} + AB + \overline{A}BC$ と等しい．この真理値表を表 3.10 に示す．

表 2.12　$f(A,B,C)$ の真理値表

A	B	C	$A+BC$	$A\overline{B}+AB+\overline{A}BC$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

ここで，ブール関数の展開とブール式の基礎を与える．

論理変数 X は，**肯定変数** X と**否定変数** $\overline{X}$ の形式で論理式に現れる．これらの X と $\overline{X}$ を**リテラル** (literal) という．

積項 (product term) とは，いくつかのリテラルを論理積演算"·"のみで結合したものである．例えば，$A \cdot B$, $X\overline{Y}Z$ などである．

積和形 (sum of product) とは，積項を論理和"+"で結合した論理式である．これをブール関数の**加法標準形** (disjunctive canonical form) 展開という．上述の f_1 はどちらも加法標準形展開である．この双対として論理和項を積で結合した**乗法標準形** (conjunctive canonical form) を構成できる．例えば，$f_2 = A \cdot (B + C)$ や $f_2 = (A + \overline{B}) \cdot (A + B) \cdot (\overline{A} + B + C)$ であり，やはりこれら 2 つの f_2 は同じ論理関数を表現している．

ブール関数を含む論理関数を表すのに真理値表を用いた．ところで論理関数とその表現を 1 対 1 に対応させることを考える．このための論理関数の表現を得る方法を**シャノン展開** (Shannon expansion) という．シャノン展開の例をみていこう．

1 変数ブール関数のシャノン展開は，

$$f(A_1) = f(0)\overline{A_1} + f(1)A_1 \tag{2.3}$$

と表される．ここで，$f(0)$ は $A_1 = 0$ のときの関数値で $f(1)$ は $A_1 = 1$ のときの関数値である．関数値は真理値表から読み取って，あるいは任意に決定してよい．従って，1 変数関数は，0, $\overline{A_1}$, A_1, $\overline{A_1} + A_1 = 1$ のいずれかとなる．

2 変数関数の場合は，

$$f(A_1, A_2) = f(0,0)\overline{A_1}\,\overline{A_2} + f(0,1)\overline{A_1}A_2 + f(1,0)A_1\overline{A_2} + f(1,1)A_1A_2 \tag{2.4}$$

となる．

さらに，一般に，n 変数ブール関数は次式のようになる．

$$\begin{aligned} f(A_1,&A_2,\cdots,A_{n-1},A_n) = \\ &f(0,0,\cdots,0,0)\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{n-1}}\,\overline{A_n} \\ &+f(0,0,\cdots,0,1)\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{n-1}}\,A_n \\ &\qquad\vdots \\ &+f(1,1,\cdots,1,1)A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n \end{aligned} \tag{2.5}$$

シャノン展開において，各積項には n 個のすべての変数 $A_1 \cdots A_n$ が，肯定変数 A_i または否定変数 $\overline{A_i}$ として現れている．つまり，シャノン展開では n 変数のすべての組み合わせを含んでいる．これらの n 変数の積項を**論理最小項** (minterm) という．従って，任意のブール関数はすべての最小項と，その最小項に対する関数値の論理積を論理和で結合したものである．これを**主加法標準形** (principal disjunctive canonical normal form) という．

真理値表から主加法標準形を求める手順は以下のようになる．

1. 真理値表における変数の各組合せについて，変数が 0 ならその変数の否定を，1 なら変数の肯定をとって積項をつくる．
2. このような積項は最小項であり，真理値表で関数値が 1 である最小項を論理和で結合すれば，主加法標準形が求まる．

[例 3.1] 次の真理値表において，$f_3 = 1$ となる A, B, C の組み合わせ（左の列）より，(0 0 1) $\Rightarrow \overline{A}\,\overline{B}C$, (0 1 0) $\Rightarrow \overline{A}B\overline{C}$, (1 0 0) $\Rightarrow A\overline{B}\,\overline{C}$, (1 1 1) $\Rightarrow ABC$ より，

$$f_3 = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC \tag{2.6}$$

表 2.13　3 変数論理関数 f_3 の真理値表

A	B	C	f_3
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

[例 3.2] 前に出た 3 変数の論理式 $A+BC$ の主加法標準形は,

$$\begin{aligned} A+BC &= A(BC+B\overline{C}+\overline{B}C+\overline{B}\ \overline{C})+BC(A+\overline{A}) \\ &= ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+A\overline{B}\ \overline{C}+ABC+\overline{A}BC \\ &= ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+A\overline{B}\ \overline{C}+\overline{A}BC \end{aligned} \tag{2.7}$$

となる．各積項にはすべての変数が現れていることに注意せよ．

ところで，最小項と 2 値ベクトルは 1 対 1 に対応し，その 2 値ベクトルの表現している 10 進数を i とすると，i に対応する最小項は m_i と略記でき便利である．上の例題の関数を f とすると，

$$\begin{aligned} f &= \overline{A}BC+A\overline{B}\ \overline{C}+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC \\ &= m_3+m_4+m_5+m_6+m_7 \\ &= \Sigma(3,4,5,6,7) \end{aligned}$$

となる．ここで例えば積項 $AB\overline{C}$ は $m_6=(110)=6$ のように得られる．最小項の 2 値ベクトル表現 (**キューブ表現**) は次章の論理式の簡単化で用いられる．

章末問題

問 2.1　2 値の論理変数 A, B, C がとる値の組み合わせで，1 の個数が偶数なら Z = 1, 奇数ならば Z = 0 となる論理関数の真理値表を書き，それから論理式を求めよ.

問 2.2　2 桁の 2 進数を $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{B} = (b_1, b_2)$ とする．$\mathbf{A} > \mathbf{B}$ のときのみ $y = 1$ となる関数を真理値表で表せ.

問 2.3　式 (2.3) に排他的論理和の真理値表を適用して，この関数の主加法標準形の式を求めよ.

問 2.4　問 2.1 の論理式のキューブ表現を求めよ.

問 2.5　A → B を論理積和形で表現せよ.

問 2.6　問 2.5 の結果を用いて (A → B)・(B → A) が対等 (≡) となることを示せ.（論理式を導いて証明する.）

問 2.7　排他的論理和 $Y = A \oplus B \oplus C$ を論理積和形で表現せよ．これはどんな関数といえるか.